3. Mathe Nacht

Abbildungen

1. Es sei α eine Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und sie sei gegeben wie folgt: Für alle $z \in \mathbb{Z}$ sei $z^\alpha := (z-1, 2z)$.

a) Schreib das Bild von 0 und das Bild von -10 hin! (ohne Begründung)

b) Ist α injektiv? (Behauptung hinschreiben und beweisen!)

c) Ist α surjektiv? (Behauptung hinschreiben und beweisen!)

d) Gib Bild(α) an! (ohne Begründung)

e) Gib ein Urbild von $(-4, -6)$ unter α an! (ohne Begründung) Gibt es ein weiteres Urbild? (Behauptung hinschreiben und kurz begründen)

f) Es sei X die Menge aller geraden ganzen Zahlen. Gib X^α an!

2. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Weiter sei $h \in G$ fest und φ sei eine Abbildung von $G \times G$ nach G gegeben wie folgt: Für alle $(g_1, g_2) \in G \times G$ sei $(g_1, g_2)^\varphi := (g_1 \circ g_2) \circ h$.

a) Gib das Bild von $(1_G, 1_G)$ an!

b) Ist φ injektiv? (Behauptung hinschreiben und beweisen)

c) Ist φ surjektiv? (Behauptung hinschreiben und beweisen)

d) Gib die Urbildmenge von h an!

3. Es sei A die Menge aller geraden ganzen Zahlen und B die Menge aller ungeraden ganzen Zahlen. Weiter sei γ eine Abbildung von A nach B und σ eine Abbildung von B nach A und sie seien gegeben wie folgt: Für alle $a \in A$ und $b \in B$ sei $a^\gamma := a + 3$ und $b^\sigma := 6 \cdot b^2$.

a) Warum ist durch γ eine Abbildung von A nach B und durch σ eine Abbildung von B nach A definiert?

b) Gib eine Abbildungsvorschrift für $\gamma * \sigma$ an!

c) Gib die Urbildmenge von 96 unter $\gamma * \sigma$ an!

d) Bestimme die Umkehrabbildung von γ und zeige, dass es sich tatsächlich um die Umkehrabbildung handelt! (Es darf angenommen werden, dass γ bijektiv ist)

e) Gegeben sei die Menge $C := \{b \in B \mid b \geq 0\}$. Ist $\sigma_{|C}$ bijektiv?

Grundlagen und Mengen

1. **a)** Wie sieht das Symbol für die natürlichen Zahlen vereinigt mit $\{0\}$ aus?

Schreibe als Menge! (d.h. mit Mengenklammern: $\{\}$)

b) die ganzen Zahlen

c) alle geraden natürlichen Zahlen

d) die Zahlen aus $\mathbb{Z}$, die beim Teilen durch 4 den Rest 3 lassen

e) alle ungeraden ganzen Zahlen

f) die natürlichen Quadratzahlen

g) die natürlichen Quadratzahlen, die durch 3 teilbar sind.

2. **a)** Bestimme die Potenzmenge von $\{1, 4, 8\}$, $\{\text{rot, grün}\}$, $\{(12), (23), \{(123)\}\}$.

b) Bestimme die Mächtigkeit der Potenzmenge der folgenden Mengen:

W sei die Menge aller Tage einer Woche,

$L := \{\text{rot, grün, blau, Hut, Gürtel}, \pi \cdot \pi\}$

3. **Wahr oder Falsch?**

a) $\{1, 3, 5\} \subseteq \{2n - 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x^2 \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} \subseteq \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\}$

c) Es gibt eine surjektive Abbildung von $A := \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ nach $\{0, 2, 6\}$.

d) Es gibt keine bijektive Abbildung von $C := \{1, \{1\}\}$ nach $D := \{\text{Rentier, Elch}\}$.

4. Gegeben seien die Mengen $A := \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $B := \{1, 4, 9, 0\}$ und $C := \{y \mid y \in \mathbb{N}, y < 7\}$. Bestimme die folgenden Mengen:

a) $(A \cap B) \cap C$

b) $(A \cap C) \cup B$

c) $(A \cap B) \cup C$

d) $C \setminus B$, $B \setminus C$, $(C \cup B) \setminus A$

e) $C \times B$

5. Wahr oder Falsch?

a) Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen ist gleichmächtig zu der Menge der natürlichen Zahlen.

b) Es gibt eine Menge M, für die M und $P(M)$ gleichmächtig sind.

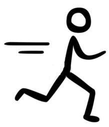
6. **a)** Gib explizit an (Abkürzungen erlaubt): A_1 sei die Menge aller Wochentage, A_2 sei die Menge aller Werktage, A_3 sei die Menge aller Wochenendtage.

b) Bestimme $A_1 \cap A_2$, $A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_3$ (Bezeichnungen wie in a).

c) Die Bezeichnungen seien wie in a).

Wahr oder Falsch? (kurze Begründung reicht)

- $A_2 \subseteq A_1$
- $A_3 \subseteq A_1$
- $A_1 \subseteq (A_2 \cap A_3)$
- $A_1 \in \mathrm{P}(A_2)$
- $A_1 = A_2 \mathbin{\dot\cup} A_3$
- $A_1 \setminus A_2 = A_3$
- $(A_1 \setminus A_2) \setminus A_3 = A_1$



7. Es sei M eine Menge und $P, Q \subseteq M$. Beweise:

a) $M \setminus (P \cup Q) = (M \setminus P) \cap (M \setminus Q)$

b) $M \setminus (P \cap Q) = (M \setminus P) \cup (M \setminus Q)$

3. Mathe Nacht

Gruppen

1. Wahr oder falsch ?
Sei im folgenden $(G, \circ)$ eine Gruppe.

a) Dann existiert ein Element $g \in G$ so, dass $g \circ g = g$ ist.

b) Wenn es $g, h \in G$ gibt so, dass $g \circ h = h \circ g$ gilt, dann ist G abelsch.

c) Für alle $g, h \in G$ gelte $(g \circ h)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$. Dann ist G abelsch.

2. Beweise!

a) Sei $(G, \circ)$ Gruppe mit der Eigenschaft :

$$\text{Für alle } g \in G \text{ gilt } g \circ g = 1_G.$$

Dann ist G abelsch.

b) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $g \in G$. Dann gilt

$$((g^{-1})^{-1})^{-1} = g^{-1}.$$

3. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $(\mathbb{R}, \circ)$ eine Gruppe, wenn $\circ$ wie folgt definiert ist:

$$\text{Für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ sei } x \circ y := \alpha \cdot x + \beta \cdot y.$$

4. Wahr oder falsch?
Hier bezeichne $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition und Multiplikation.

a) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

b) Sei $G := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\}$. Sei weiter $\circ$ wie folgt definiert:
Für alle (a, b), $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$(a, b) \circ (c, d) := (a \cdot c,\ a \cdot c + b \cdot d).$$

Dann ist $(G, \circ)$ eine Gruppe.

c) Seien $(G, \bullet)$ und $(H, \circ)$ Gruppen. Sei $*$ wie folgt definiert:
Für alle $(a, b), (c, d) \in G \times H$ gilt

$$(a, b) * (c, d) := (a \bullet c, b \circ d).$$

Dann ist $(G \times H, *)$ eine Gruppe.

5. Wahr oder falsch?
Hier bezeichne $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition und Multiplikation.

a) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Sei weiter $N = \{m \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.
Dann ist $(N, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

b) Sei $M := \{m \in \mathbb{Z} \mid \text{m ist ungerade}\}$
Dann ist $(M, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

c) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und seien weiter $(G_1, \circ), (G_2, \circ)$ zwei echte Untergruppen von G.
Dann ist $(G_1 \cup G_2, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$.

6. Wahr oder falsch?
Hier bezeichne $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition und Multiplikation.

a) Seien $m \in \mathbb{N}$ fest und $N := \{m \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Sei weiter $\alpha : (\mathbb{Z}, +) \to (N, +)$ eine Abbildung wie folgt definiert:

Für alle $z \in \mathbb{Z}$ sei $z^\alpha := m \cdot z$.
Dann ist α ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(N, +)$.

b) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Sei weiter $\beta : (G, \circ) \to (G, \circ)$ eine Abbildung wie folgt definiert:
Für alle $g \in G$ sei $g^\beta := g \circ g$.
Dann ist β ein Gruppenhomomorphismus von $(G, \circ)$ nach $(G, \circ)$.

c) Sei weiter $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ eine Abbildung wie folgt definiert:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei $x^\gamma := 2 \cdot x + 7$.
Dann ist γ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}, +)$.

d) Sei $M := \{m \in \mathbb{Z} \mid \text{m ist ungerade}\}$. Sei weiter $\varphi : (M, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ eine Abbildung wie folgt definiert:
Für alle $z \in M$ sei $z^\varphi := 2 \cdot z$.
Dann ist φ ein Gruppenhomomorphismus von $(M, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$.

Vollständige Induktion

Beweise die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion!
Untersuche dabei zunächst, ab welcher Zahl $n \in \mathbb{N}_0$
die Aussage zutrifft, wenn es nicht angegeben ist.

1. $3^{2n} + 7$ ist durch 8 teilbar

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

3. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

4. $2^n > n^2$ für $n > 4$

5. $n! > 2^n$

6. $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$

7. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Dann ist der Durschnitt von n Untergruppen von G ebenfalls eine Untergruppe von G.

3. Mathe Nacht

Relationen

1. Was ist eine Äquivalenzrelation? Was ist eine Ordnungsrelation?
Nenne alle Eigenschaften!

2. Sei $A := \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge. Gib eine Relation R auf A explizit an, die

a) reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.

b) weder symmetrisch, noch antisymmetrisch ist.

c) transitiv und reflexiv, aber nicht symmetrisch ist.

3. Sei $\sim$ wie folgt gegeben: Für alle Mengen A, B gelte $A \sim B$ genau dann, wenn A und B gleichmächtig sind.
Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

4. Sei $R := \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } a \cdot b = 1\}$ eine Relation auf $\mathbb{Z}$. Ist R reflexiv? Ist R transitiv? Ist R symmetrisch? Ist R antisymmetrisch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

5. Wie viele unterschiedliche Relationen existieren auf $\{1, 2, 3\}$?

6. Sei $M := \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und sei eine Relation $\prec$ auf M wie folgt gegeben:
Für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in M$ gelte $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ genau dann, wenn $a \leq c$ und $b \geq d$ ist.
Zeige, dass $\prec$ eine Ordnungsrelation auf M ist.

7. Ist die Relation $R := (\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | a \leq b\} \setminus \{(0, 1), (-1, 0)\}) \cup \{(1, 0), (0, -1)\}$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$?

8. Sei $\sqcap$ eine Relation auf $\mathbb{Z}$ wie folgt gegeben: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gelte $a \sqcap b$ genau dann, wenn $a \cdot b$ eine Quadratzahl ist.

(a) Zeige, dass $\sqcap$ keine Äquivalenzrelation ist.

(b) Wie musst du die Voraussetzung verändern, damit $\sqcap$ eine Äquivalenzrelation wird?

(c) Sind folgende Aussagen (für die verbesserte Relation mit (b)) wahr oder falsch?

(1) $3 \in K[4]$.

(2) $K[5] = K[0]$.

(3) Für alle $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: $a \in K[a]$.

(4) Für alle $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: $K[a] = K[4 \cdot a]$.

9. Gegeben sei die Äquivalenzrelation $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ ist durch 7 teilbar}\}$ auf $\mathbb{Z}$. Wie viele Äquivalenklassen gibt es und wie sehen sie aus?